Índice

- Razones.....5
- Proporciones.....14
- Series de razones geométricas.....24
- Promedios I.....33
- Promedios II.....43
- Magnitudes proporcionales.....52
- Regla de tres.....62
- Aplicación de magnitudes I.....73
- Aplicación de magnitudes II.....81
- Tanto por ciento.....90
- Aplicaciones del tanto por ciento.....99
- Aplicaciones comerciales.....108
- Regla de interés simple.....117
- Interés compuesto.....126
- Regla de descuento I.....135
- Regla de descuento II.....146
- Regla de mezcla I.....155
- Regla de mezcla II.....165
- Estadística I.....174
- Estadística II.....189
- Análisis combinatario I.....199
- Análisis combinatario II.....211
- Probabilidades I.....220

RAZONES

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Interpreta el resultado al comparar dos cantidades.
- Aplica razones cuando se presentan problemas en la vida cotidiana.

Helicocuriosidades

Lectura

A veces nos hemos preguntado al pasar delante de un edificio, o de un árbol, ¿cuál será su altura?, y pensamos tal vez que medir dicha altura sea un poco complicado y difícil de lograr. Sin embargo, es mucho más fácil de lo que uno puede pensar. Para poder lograrlo se necesita trabajar entre dos personas y necesitas de una vara graduada en decímetros. Primero camina 18 pasos alejándote desde la base del árbol y deja ahí a tu compañero sujetando la vara en posición perfectamente vertical y termina caminando dos pasos más. Hecho esto tiéndete en el suelo y mira hacia la copa del árbol a través de la vara, pide a tu compañero que suba o baje su mano hasta que la mano y la copa del árbol estén en una misma línea. La altura así obtenida en decímetros es la altura del árbol en metros, es decir, si la altura en la vara es de 15 decímetros y 2 centímetros, entonces, la altura del árbol será de 15,2 m. Si comparamos estos valores mediante una sustracción o una división, al resultado lo llamaremos “razón”, y será lo que estudiaremos en este capítulo.

Helicoteoría

RAZONES

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante las operaciones de sustracción o división.

Ejemplo

Las edades de un padre y su hijo son 45 y 15 años, respectivamente.

- Comparemos con la sustracción

$$\underbrace{45 - 15}_{\text{Razón}} = \underbrace{30}_{\text{Valor de la razón aritmética}}$$

- Comparemos con la división

$$\underbrace{\frac{45}{15}}_{\text{Razón}} = \underbrace{\frac{3}{1}}_{\text{Valor de la razón geométrica}}$$

1. Razón aritmética

Cuando las cantidades se comparan mediante la sustracción.

Ejemplo

Lucho tiene S/500 y Juan S/200. Determine el valor de la razón aritmética.

Resolución

$$S/500 - S/200 = S/300$$

Luego

- El dinero de Lucho excede al de Juan en S/300.
- El dinero de Lucho es mayor que el de Juan en S/300.

Para las cantidades A y B, la **razón aritmética** es

$$\boxed{A - B = r}$$

Donde A: antecedente

B: consecuente

r: valor de la razón aritmética

2. Razón geométrica

Cuando las cantidades se comparan mediante la división.

Ejemplo

La edad de Miguel es 27 años y la de Carlos, 36 años. Determine el valor de la razón geométrica.

Resolución

$$\frac{27 \text{ años}}{36 \text{ años}} = \frac{3(9 \text{ años})}{\underbrace{4(9 \text{ años})}_{\text{unidad de referencia}}} = \frac{3}{4}$$

Luego

- Las edades de Miguel y Carlos están en la relación de 3 a 4.
- Las edades de Miguel y Carlos son entre sí como 3 es a 4.

Para las cantidades A y B la **razón geométrica** es

$$\boxed{\frac{A}{B} = k}$$

Donde A: antecedente

B: consecuente

k: valor de la razón geométrica

Nota

Si nos mencionan solo razón, entonces asumiremos que se trata de la razón geométrica.

Helicosíntesis

RAZÓN

es la

comparación de dos cantidades

mediante una

Sustracción

Razón aritmética

$a - b = r$

División

Razón geométrica

$\frac{a}{b} = k$

Problemas resueltos

1. En una razón geométrica, el consecuente es igual a los 2/3 del antecedente. Si el valor de la razón aritmética de dichos términos es 15, halle el mayor de ellos.

Resolución

Sea la razón geométrica: $\frac{a}{b}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{Antecedente} \\ \longrightarrow \text{Consecuente} \end{matrix}$

Por dato: $b = \frac{2}{3} \cdot a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{matrix} a = 3k \\ b = 2k \end{matrix}$

Además: $\underbrace{a}_{3k} - \underbrace{b}_{2k} = 15 \rightarrow \boxed{k = 15}$

$\therefore$ El mayor es

$$a = 3 \times 15 = 45$$

Rpta.: 45

2. En una caja hay 4 crayones rojos por cada 3 azules y también se puede contar 2 blancos por cada 5 azules. Si hay 28 crayones rojos más que blancos, ¿cuántos azules hay?

Resolución

Sea: número de crayones rojos: a

número de crayones azules: b

número de crayones blancos: c

Por dato: $\begin{matrix} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} \\ \frac{c}{b} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} \end{matrix} \rightarrow a = 20k,\ b = 15k,\ c = 6k$

Además: $\underbrace{a}_{20k} - \underbrace{c}_{6k} = 28 \rightarrow \boxed{k = 2}$

$\therefore$ El número de crayones azules es

$$b = 15 \times 2 = 30$$

Rpta.: 30

3. A una reunión social asistieron por cada 7 hombres, 4 mujeres. Si en un determinado momento, 28 hombres y 10 mujeres no bailan, ¿cuántas personas asistieron a dicha reunión?

Resolución

Del enunciado

$$\left.\begin{matrix} \text{Número de hombres} \\ \text{Número de mujeres} \end{matrix}\right\} \text{Total} = 11k$$

Además

	Bailan	No bailan
Hombres	$7k - 28$	28
Mujeres	$4k - 10$	10

Se cumple

Número de hombres que bailan = Número de mujeres que bailan

Luego

$$7k - 28 = 4k - 10$$
$$3k = 18 \rightarrow \boxed{k = 6}$$

$\therefore$ El número de asistentes es

$$11 \times 6 = 66$$

Rpta.: 66

4. Las edades de Virginia y Ángel están en la relación de 6 a 5 y dentro de 9 años será de 7 a 6. ¿Cuánto sumarán sus edades hace 15 años?

Resolución

$$\frac{\text{Edad de Virginia}}{\text{Edad de Ángel}} = \frac{6k}{5k}$$

Dentro de 9 años será

$$\frac{6k + 9}{5k + 9} = \frac{7}{6}$$

Entonces

Edad de Virginia = 54 y edad de Ángel = 45

Piden:
$$\left.\begin{matrix} \text{Edad de Virginia} - 15 = 39 \\ \text{Edad de Ángel} \quad - 15 = 30 \end{matrix}\right\} +$$
$$\text{Suma de edades} \quad = 69$$

Rpta.: 69

5. En una urna hay 84 bolas entre negras y rojas en la relación de 7 a 5, respectivamente. ¿Cuántas bolas negras se deben quitar para que la relación sea de 5 a 7?

Resolución

Se tiene

$$\frac{\text{Bolas negras}}{\text{Bolas rojas}} = \frac{5}{7}$$

$$7k + 5k = 84 \quad \rightarrow \quad k = 7$$

Entonces

$$\begin{matrix} \text{Bolas negras} = 49 \\ \text{Bolas rojas} \quad = 35 \end{matrix}$$

Piden

$$\frac{49 - x}{35} = \frac{5}{7} \rightarrow x = 24$$

Rpta.: 24

Helicopráctica

1. La relación de las propinas de Rihanna y Belén es de 5 a 3 y su razón aritmética es 20. Determine la propina de Belén.

2. La razón geométrica de dos números es $\frac{3}{5}$ y su razón aritmética es 320. Halle el mayor de dichos números.

3. Alberto cuando tuvo su hijo tenia 30 años. Si actualmente la relación de las edades es $\frac{3}{8}$, ¿qué edad tiene el hijo actualmente?

4. En una caja hay 72 tizas entre azules y blancas, las cuales están en la relación de 5 a 3, respectivamente. ¿Cuántas tizas blancas debemos agregar para que la relación sea de 9 a 10?

5. Actualmente, las edades de dos personas están en la relación de 8 a 11 y dentro de 10 años la relación será de 7 a 9. Hace 4 años, ¿en qué relación estaban?

6. El dinero que tiene A es al de B como 5 es a 7, y el de B es al de C como 3 es a 2. Sabiendo que A y C tienen juntos S/580, ¿cuánto tiene B?

7. En una fiesta, antes de servirse la comida, el número de hombres es al número de mujeres como 7 es a 5. Luego de comer se retiraron 5 parejas y 5 hombres, por lo cual la razón de hombres a mujeres es de 5 a 4. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

8. En un barril hay 30 litros de vino y 20 litros de agua. Si extraemos 15 litros de dicha mezcla, ¿cuántos litros son de agua?

Helicotaller

Nivel I

1. La relación de dos números es de 7 a 3, y el valor de su razón aritmética es 40. Calcule la suma de dichos números.

Resolución

2. Las edades de los primos Dylan y Álex son entre sí como 5 es a 4, respectivamente, y el producto de las mismas es 180. Determine el doble de la edad de Dylan.

Resolución

Nivel II

3. A una reunión asistieron 160 personas. Si por cada 3 varones hay 5 damas, ¿en cuánto excede el número de damas al número de varones?

Resolución

4. El precio de un libro es al de un cuaderno como 9 es a 2. Si al comprar 3 libros y 5 cuadernos se invierte S/111, ¿cuál es el costo de un cuaderno?

Resolución

5. Las tardanzas al trabajo de Katty y Evelyn se encuentran en la relación de 9 a 7, respectivamente. Si Katty tiene 10 tardanzas más que Evelyn, ¿cuántas tardanzas tendrá Evelyn?

Resolución

Nivel III

6. Un ciclista va al alcance de un peatón. Si sus velocidades están en la relación de 9 a 5, además, inicialmente estaban separados 32 metros, calcule la suma de los espacios recorridos por el ciclista y el peatón hasta el momento del alcance.

Resolución

7. Dos ciclistas parten de un punto A con velocidades que están en la relación de 7 a 3. Cuando el más veloz ha recorrido 56 km, regresa al encuentro del otro. ¿Cuántos kilómetros recorrió el más lento hasta el encuentro?

Resolución

8. En un estante donde hay más de 465 y menos de 500 libros de aritmética, álgebra y geometría, se sabe que por cada 3 libros de aritmética hay 5 de álgebra y por cada 4 libros de álgebra hay 6 de geometría. ¿Cuántos libros de aritmética tiene dicho estante?

Resolución

Helicodesafío

1. Las edades actuales de Franco y Lourdes son como 5 es a 9. Si hace 15 años dichas edades se encontraban en la relación de 1 a 3, ¿dentro de cuántos años se encontrarán en la relación de 3 a 4?

A) 28 B) 20 C) 33
D) 35 E) 40

2. En una carrera de 1000 m, A le gana a B por 200 m; mientras que en otra de 700 m entre B y C, C gana por 400 m. En una carrera de 560 m entre A y C, ¿quién ganaría y por cuánto?

A) Gana C por 260 m. B) Gana A por 260 m.
C) Gana C por 200 m. D) Gana A por 200 m.
E) Llegan iguales.

Helicorreto

1. En una razón geométrica, el consecuente es 84 y el antecedente es 21 unidades más. Halle el valor de la razón geométrica elevada al cuadrado.

A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{25}{16}$ C) $\frac{1}{16}$

D) $\frac{25}{9}$ E) $\frac{49}{25}$

2. Las edades de Plusito y Pollito son entre sí como 9 es a 7, respectivamente, y el producto de las mismas es 567. ¿Qué edad tendrá Plusito dentro de 13 años?

A) 27 años B) 30 años

C) 34 años D) 40 años

E) 42 años

3. Para preparar un vaso de 50 ml de un trago se necesitan tres medidas de Coca Cola, una medida de limón y una medida de amargo de angostura. ¿Cuántas medidas de Coca Cola se necesitarán para preparar un litro de este trago?

A) 96 B) 150 C) 60

D) 144 E) 120

4. Dos móviles, cuyas velocidades están en la relación de 11 a 5, tienen una separación de 6 cuadras en línea recta. ¿Cuántos metros, aproximadamente, ha recorrido el menos veloz cuando el otro móvil lo alcanza? (1 cuadra $<>$ 100 m aproximadamente)

A) 550 B) 600 C) 500

D) 450 E) 480

5. En el matrimonio de Miguel, de los asistentes a la iglesia, eran 9 mujeres por cada 7 hombres, luego en la recepción se observa que se retiraron 8 parejas y 5 mujeres, quedando la nueva relación de 5 a 4. ¿Cuántos hombres estaban en la recepción?

A) 95 B) 84 C) 72

D) 75 E) 76

Helicotarea

Nivel I

1. En una razón aritmética, el antecedente es 735 y el consecuente, la quinta parte del antecedente. Halle el valor de la razón aritmética.

A) 588 B) 488 C) 678
D) 578 E) 487

2. Los volúmenes de dos sólidos son entre sí como 6 es a 11. Si el menor volumen es 72 u^3, determine el mayor volumen.

A) 144 u^3 B) 132 u^3 C) 112 u^3
D) 169 u^3 E) 165 u^3

3. José tuvo a su hijo cuando él tenía 25 años. Si actualmente la relación de sus edades es de 8 a 3, ¿cuántos años tiene el hijo?

A) 20 B) 18 C) 15
D) 28 E) 12

4. En un evento deportivo se observa que por cada 3 varones hay 4 mujeres. Si en total han participado 98 deportistas, ¿cuántos son varones?

A) 50 B) 56 C) 45
D) 42 E) 33

Nivel II

5. El costo de un libro es al de un lapicero como 7 es a 2. Si el costo de 5 libros y 8 lapiceros es S/510, determine el costo de un lapicero.

A) S/12 B) S/16 C) S/18
D) S/15 E) S/20

6. Dos barriles contienen vino y sus volúmenes son entre sí como 25 y 8. Si la capacidad del que tiene mayor volumen es de 150, determine el menor volumen.

A) 20 L B) 40 L C) 48 L
D) 46 L E) 44 L

7. La cantidad de dinero que tiene José es a la de Miguel como 7 es a 3. Además, el triple del dinero de José, más el de Miguel es 96. ¿Cuánto tiene José?

A) S/27 B) S/24 C) S/32
D) S/28 E) S/36

8. Dos autos, que se encuentran en línea recta, están separados 117 m y tienen velocidades que están en la relación de 17 a 8. Cuando el más veloz alcance al otro, ¿qué distancia habrá recorrido el más lento?

A) 130 m B) 120 m C) 104 m
D) 108 m E) 112 m

Nivel III

9. Las edades de dos hermanos están en la relación de 9 a 7. Si sus edades, hace 5 años, se diferenciaban en 8 años, ¿dentro de cuántos años las edades de ambos sumarán 84?

A) 20 B) 10 C) 30
D) 15 E) 12

10. En un recipiente se tiene 28 litros de vino. Se adiciona cierta cantidad de agua, por lo cual al final por cada 5 litros de agua hay 4 litros de vino. Halle el valor de la razón aritmética de dichos volúmenes.

A) 7 B) 12 C) 15
D) 10 E) 8

PROPORCIONES

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

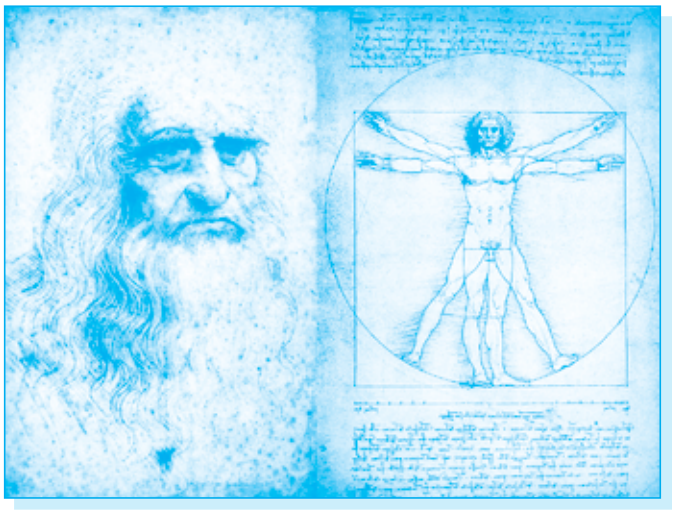
- Reconoce las características inherentes de los objetos y los seres dada la comparación.
- Deduce de los resultados encontrados en la comparación para obtener formas prácticas de resolver problemas de la vida real y en otras disciplinas.

Helicocuriosidades

Leonardo di Ser Piero da Vinci

Nació en Anchiano de Italia, el 15 de abril de 1452 y murió en Castillo de Clos de Lucé Francia el 2 de mayo de 1519, fue un arquitecto, escritor, pintor, inventor, músico, ingeniero y el hombre del Renacimiento por excelencia. Está ampliamente considerado como uno de los más grandes pintores de todos los tiempos y quizá, la persona con más y más variados talentos de la historia.

Como artista de éxito, obtuvo permiso para diseccionar cadáveres humanos en el Hospital de Santa María Nuova en Florencia y más tarde en hospitales de Milán y Roma. Produjo muchos dibujos anatómicos extremadamente detallados. El ejemplo más destacado es el Hombre de Vitruvio (h. 1490), estudio de las **proporciones** humanas basado en el tratado recién descubierto del arquitecto romano Marco Vitruvio.



Helicoteoría

PROPORCIONES

Concepto

Es la igualdad del valor numérico de dos razones de la misma clase.

1. Proporción aritmética

Es la igualdad de dos razones aritméticas.

Ejemplo

Las edades de cuatro amigos son: 31 años, 25 años, 26 años y 20 años.

$$\begin{array}{l} 31 - 25 = 6 \\ 26 - 20 = 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1.^{er} & 2.^{o} & 3.^{o} & 4.^{o} \\ 31 - & 25 = & 26 - & 20 \end{array}$$

Términos medios

Términos extremos

31 y 26: antecedentes

25 y 20: consecuentes

En general: $A - B = r$

$C - D = r$

$$\boxed{A - B = C - D}$$

Consecuencia

$$\boxed{A + D = C + B}$$

Suma de extremos = Suma de medios

2. Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas.

Ejemplo

Los pesos de cuatro objetos son 25 kg, 10 kg, 30 kg y 12 kg.

Observamos

- $\frac{25}{10} = \frac{5}{2}$
- $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

Tendremos

$$\text{Términos}\left\{\begin{array}{l} 1.^{er} \rightarrow \\ 2.^{o} \rightarrow \end{array}\right. \overbrace{\frac{25}{10} = \frac{30}{12}}^{\text{Antecedentes}} \left.\begin{array}{l} \leftarrow 3.^{er} \\ \leftarrow 4.^{o} \end{array}\right\}\text{Términos}$$

Consecuentes

donde

25 y 12: son términos extremos

10 y 30: son términos medios

Consecuencia

$$\boxed{25 \times 12 = 10 \times 30}$$

Producto de términos extremos = Producto de términos medios

En general

$$\frac{A}{B} = k$$

$$\frac{C}{D} = k$$

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = k}$$

Una proporción puede ser discreta o continua.

Tipos de proporciones

A. Proporción Discreta

Cuando los valores de los términos medios son diferentes.

- **Proporción Aritmética Discreta**

$\boxed{A - B = C - D} \longrightarrow$ Cuarta diferencial

Ejemplo: Determine la cuarta parte diferencial de 21; 18 y 13.

Formamos la proporción

$$21 - 18 = 13 - D$$

$$D = 10$$

➢ **Proporción Geométrica Discreta**

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{C}{D}} \longrightarrow \text{Cuarta proporcional}$$

Ejemplo: Determine la cuarta parte proporcional de 15; 25 y 18.

Formamos la proporción

$$\frac{15}{25} = \frac{18}{D}$$

$$D = 30$$

B. Proporción Continua

Cuando los valores de los términos medios son iguales.

➢ **Proporción Aritmética Continua**

$$\boxed{A - B = B - C} \longleftarrow \text{Tercera diferencial}$$

Términos medios

Ejemplo

Determine la media diferencial de 30 y 26.

Formamos la proporción

$$30 - B = B - 26$$

$$28 = B$$

➢ **Posición Geométrica Continua**

Media proporcional $\longrightarrow \boxed{\frac{A}{B} = \frac{B}{C}} \longleftarrow$ Tercera diferencial

Ejemplo

Determine la media proporcional de 3 y 12.

Formamos la proporción

$$\frac{3}{B} = \frac{B}{12}$$

Luego $\quad B^2 = 36$

Entonces $\quad B = 6$

Propiedades

Dado

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

➢ $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} = k+1$

➢ $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} = k-1$

➢ $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{k+1}{k-1}$

➢ $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{c^n}{d^n} = k^n$

Ejemplo

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3}$ y $a + b = 32$, halle el valor de b.

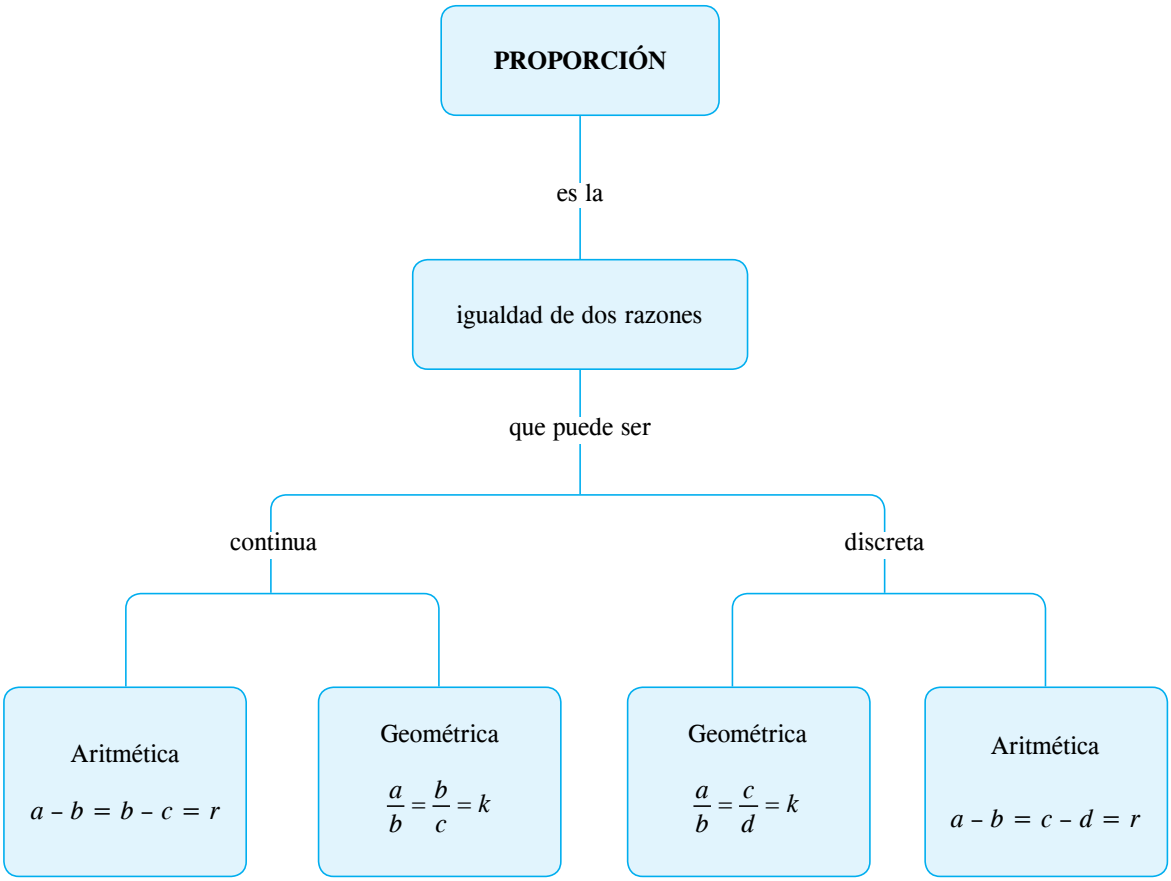
Usando la propiedad tenemos

$$\frac{a+b}{b} = \frac{5+3}{3}$$

$$\frac{\overset{4}{\cancel{32}}}{b} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{3}$$

$$b = 12$$

Helicosíntesis



Problemas resueltos

1. Sea N la tercera diferencial de 26 y 18. Si M es la media diferencial de 9 y 1, halle la cuarta diferencial de N, M y 7.

Resolución

Se tiene

N: tercera diferencial de 26 y 18

$\rightarrow 26 - 18 = 18 - N$

$\underbrace{26 + N}_{36} = \underbrace{18 + 18}_{36} \rightarrow N = 10$

M: media diferencial de 9 y 1

$\rightarrow 9 - M = M - 1$

$\underbrace{9 + 1}_{10} = \underbrace{2M}_{10} \rightarrow M = 5$

Piden la cuarta diferencial de N, M y 7.

$\underbrace{N}_{10} - \underbrace{M}_{5} = 7 - x \qquad \therefore x = 2$

Rpta.: 2

2. En una proporción geométrica continua, el producto de los cuatro términos es 4096, y uno de los extremos es 64. Calcule la suma de los cuatro términos.

Resolución

Sea la proporción geométrica continua

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \text{ donde } a \cdot c = b^2$$

Por dato

$a \cdot b \cdot b \cdot c = 4096 \rightarrow b^4 = 4096 = 8^4 \rightarrow \boxed{b = 8}$

Entonces $\underbrace{a}_{64} \cdot \underbrace{c}_{1} = 8^2 = 64$

(por dato uno de los extremos es 64)

Piden la suma de los cuatro términos

$$\therefore a + b + b + c = 64 + 8 + 8 + 1 = 81$$

Rpta.: 81

3. En una proporción geométrica de razón entera, se sabe que la suma de los cuadrados de los antecedentes es 117. Calcule el producto de los consecuentes.

Resolución

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \underset{\text{Razón}}{\underset{\downarrow}{k}}$$

Sea la proporción geométrica

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Además: $a = bk$ y $c = dk$

Por dato

$$\underbrace{a^2}_{(bk)^2} + \underbrace{c^2}_{(dk)^2} = 117 \rightarrow b^2k^2 + d^2k^2 = \underbrace{117}$$

$$k^2(b^2 + d^2) = 9 \times 13$$

Se cumple

$$k^2 = 9 \wedge b^2 + d^2 = 13$$

$$k = 3 \wedge b = 2 \wedge d = 3$$

Piden el producto de consecuentes

$$\therefore bd = 2 \times 3 = 6$$

Rpta.: 6

4. Si $\dfrac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} = \dfrac{11}{5}$, calcule $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

Resolución

$$\uparrow \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} \downarrow = \uparrow \frac{11}{5} \downarrow$$

$$\frac{\sqrt[4]{x} + \cancel{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[4]{x} - \cancel{\sqrt[4]{y}}}{\cancel{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{y} - \cancel{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{y}} = \frac{11+5}{11-5}$$

$$\frac{2\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{y}} = \frac{16}{6}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}} = \frac{8}{3}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{64}{9}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{64}{9}$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{9}{64}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{64}{9} + \frac{9}{64} = \frac{4177}{576}$$

5. La suma de los cuatro términos de una proporción geométrica es 175. Si cada uno de los términos es igual a los 3/4 del precedente, ¿cuál es el último término?

Resolución

Si le asignamos a a el valor de $64k$ y completamos los valores respectivos tenemos

$$\frac{64k}{48k} = \frac{36k}{27k} \rightarrow 64k + 48k + 36k + 27k = 175$$

$$k = 1$$

Piden último término: $27k = 27$

Rpta.: 27

Helicopráctica

1. En una proporción aritmética continua, los términos extremos son 12 y 8. Halle la media diferencial.

2. Los términos extremos de una proporción geométrica son 12 y 4; además, los términos medios se diferencian en 2. Calcule la suma de dichos términos medios.

3. En una proporción geométrica continua, los términos extremos son entre sí como 4 es a 9 y su diferencia es 20. Halle la media proporcional.

4. Si

J: media proporcional de 18 y 50

E: cuarta proporcional de 15, 65 y 21

S: tercera proporcional de 32 y 88

calcule J + E + S.

5. Calcule la suma de la tercera diferencial de 24 y 18 con la cuarta proporcional de 18; 6 y 81.

6. La suma de los cuatro términos de una proporción geométrica es 65. Si cada uno de los términos es igual a los 2/3 del precedente, ¿cuál es el último término?

7. En una proporción geométrica continua, el producto de sus términos es 5^8. Halle el término medio.

8. Si $\dfrac{\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}=\dfrac{7}{3}$, calcule $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

Helicotaller

Nivel I

1. En una proporción aritmética, los términos extremos suman 50 y los medios se diferencian en 10. Calcule el producto de los términos medios.

Resolución

2. Sabiendo que

A: media diferencial de 59 y 37

N: tercera diferencial de 18 y 15

R: cuarta diferencial de 21; 17 y 19

calcule A + N + R.

Resolución

Nivel II

3. El producto de los cuatro términos de una proporción continua es 625. Halle la media proporcional.

Resolución

4. En una proporción aritmética continua, la suma de los términos es 96 y los extremos están en la relación de 9 a 3. Halle la tercera diferencial.

Resolución

5. En una proporción aritmética continua, la diferencia de los términos extremos es 6 y la media diferencial, 10. Determine el mayor de los términos extremos.

Resolución

Nivel III

6. En una proporción geométrica discreta de razón igual a 3/2, se observa que la suma de extremos es 31 y la suma de medios, 29. Calcule la suma de los antecedentes.

Resolución

7. Las edades de tres amigos forman una proporción aritmética continua. Halle la edad del intermedio sabiendo que la suma de sus edades es 57.

Resolución

8. Sea $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ y $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}=70$. Halle el valor de b si los términos son enteros.

Resolución

Helicodesafío

1. En una proporción geométrica continua, se sabe que la diferencia de los extremos es 40 y la suma de términos, 100. Calcule la suma de los extremos.

A) 50 B) 52 C) 54
D) 56 E) 58

2. Si $\frac{\sqrt{a^2-8}}{24}=\frac{\sqrt{b^2-18}}{36}$, con a y $b \in \mathbb{Z}^+$, halle la tercera proporcional de a y b sabiendo que $a \cdot b \in [60; 100]$.

A) 24 B) 18 C) 20
D) 16 E) 15

Helicorreto

1. En una proporción aritmética, los términos extremos suman 97 y los términos medios se diferencian en 13. Determine el tercer término.

A) 55 B) 42 C) 40
D) 52 E) 37

2. En una proporción aritmética continua, la media diferencial es 17. Calcule la suma de los términos extremos.

A) 34 B) 51 C) 4 2
D) 50 E) 35

3. En una proporción geométrica continua, los términos extremos son entre sí como 9 es a 16 y su diferencia es 28. Determine la media proporcional.

A) 64 B) 36 C) 84
D) 24 E) 48

4. En una proporción aritmética continua, la diferencia de los extremos es 20 y la media diferencial es 18. Determine la tercera diferencial.

A) 12 B) 24 C) 28
D) 8 E) 10

5. Si la suma de los cuatro términos de una proporción geométrica es 544 y cada uno de los tres últimos términos es 3/5 los del precedente, determine el primer término.

A) 54 B) 250 C) 90
D) 180 E) 360

Helicotarea

Nivel I

1. En una proporción aritmética, los términos medios suman 18 y los extremos se diferencian en 6. Calcule el producto de los extremos.

A) 72 B) 70 C) 60
D) 50 E) 56

2. En una proporción geométrica, el producto de los términos extremos es 72 y los términos medios suman 18. Halle el mayor de los términos medios.

A) 9 B) 12 C) 36
D) 24 E) 18

3. Si A es la cuarta diferencial de 20; 15; 32 y B, la cuarta proporcional de 6; 18 y 5, calcule A + B.

A) 48 B) 36 C) 42
D) 35 E) 21

4. En una proporción continua, el producto de sus términos es 256. Halle la media proporcional.

A) 6 B) 16 C) 12
D) 4 E) 8

Nivel II

5. La suma de los cuatro términos de una proporción aritmética continua es 84. Halle la media diferencial.

A) 35 B) 28 C) 36
D) 20 E) 21

6. En una proporción continua, los términos extremos se diferencian en 6 y la media proporcional es 10. Calcule la suma de términos de la proporción.

A) 32 B) 36 C) 45
D) 40 E) 35

7. En una proporción aritmética, los términos extremos son entre sí como 11 es a 7; además, los términos medios suman 54. Halle la cuarta diferencial.

A) 33 B) 20 C) 24
D) 36 E) 21

8. Halle la cuarta proporcional de 56; m y n, sabiendo que m es la medida proporcional de 28 y 7, y n, la tercera proporcional de 9 y 12.

A) 6 B) 8 C) 4
D) 12 E) 14

Nivel III

9. Si $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\dfrac{5}{3}$, calcule $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

A) 9/16 B) 1/16 C) 15/4
D) 16 E) 16/9

10. Los antecedentes de una proporción están en la relación de 8 a 3. Si la suma de los consecuentes es 220 y los términos extremos están en la relación de 4 a 3, calcule la suma de términos.

A) 280 B) 330 C) 350
D) 360 E) 390

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Aplica correctamente y en forma adecuada las propiedades de serie de razones geométricas.
- Resuelve problemas relacionados a la vida cotidiana aplicando la serie de razones geométricas.

Helicocuriosidades

Lectura

El administrador de una empresa observa que esta crecerá en la mitad del capital cada año, es decir, si al iniciar este año su capital fue de S/20 000, para el próximo año habrá un crecimiento de S/10 000, comenzando dicho año con S/30 000.

Él deseaba conocer un algoritmo que muestre los capitales de inicio de cada año, comenzando ahora (año 2014) y que muestre el capital inicial de los próximos años.

Recordó que en sus estudios del colegio conoció las series de razones geométricas equivalentes y aprovechó las conocidas series geométricas de razones continuas y equivalentes, de manera que conociendo el capital inicial, se puede obtener el capital con el que se iniciará los siguientes años.

Al final de la presente clase, tú estarás en la capacidad de realizar lo mismo y resolver la interrogante.

Si el presente año se inició con un capital S/20 480, ¿con cuánto se iniciará dentro de 10 años?

¡Anímate a resolverlo!

Helicoteoría

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Sean

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2};\ \frac{7}{14}=\frac{1}{2}\ \text{y}\ \frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

las cuales tienen el mismo valor numérico, lo que permite formar lo siguiente:

$$\frac{4}{8}=\frac{7}{14}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

al cual se le denomina serie de razones geométricas equivalentes (SRGE).

En general para n razones

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3}=\ldots=\frac{a_n}{c_n}=k}$$

donde

- $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$: antecedentes
- $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$: consecuentes
- k: constante de la serie (valor de la razón)

Propiedades

1. $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n}=k$$

$$\boxed{\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}}=\text{Razón}}$$

Ejemplo

Si $\frac{a}{5}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4}$ y $a+c=45$, halle el valor de b.

Resolución

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4}=\frac{a+c}{5+4}$$

Luego $\frac{b}{2}=\frac{45}{9}$

Por lo tanto $b=10$.

2. $$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}{c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\ldots\cdot c_n}=k^n$$

$$\boxed{\frac{\text{Producto de antecedentes}}{\text{Producto de consecuentes}}=(\text{Razón})^n}$$

Ejemplo

Si $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}$ y $ab=240$, halle el valor de c.

Resolución

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}\rightarrow\frac{\overbrace{a\cdot b}^{240}}{3\cdot 5}=\left(\frac{c}{9}\right)^2$$

Luego $\frac{240}{15}=\frac{c^2}{81}$

Por lo tanto $c=36$.

Observación

En las siguientes series:

- $\frac{64}{32}=\frac{32}{16}=\frac{16}{8}=2$
-
- $\frac{16}{24}=\frac{24}{36}=\frac{36}{54}=\frac{54}{81}=\frac{2}{3}$

Se observa que el primer consecuente es igual al segundo antecedente, el segundo consecuente es igual al tercer antecedente y así sucesivamente.

A este tipo de series se le denomina serie de razones geométricas equivalentes continuas.

En general

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{c_2}{c_3}=\ldots=\frac{c_{n-1}}{c_n}=k}$$

Nota

- Las propiedades de la SRGE también se cumplen en este tipo de series.
- Las propiedades que se aplican en las proporciones se aplican también en las series y viceversa.

Helicosíntesis

SERIE DE RAZONES

es una

igualdad de más de dos razones

puede ser

continua

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$$

discreta

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Problemas resueltos

1. Si $\frac{A}{3} = \frac{B}{7} = \frac{C}{12} = \frac{D}{5}$, además $A \cdot C - B \cdot D = 9$, calcule $A + B + C + D$.

Resolución

De la serie $\frac{A}{3} = \frac{B}{7} = \frac{C}{12} = \frac{D}{5} = k$

$A = 3k$, $B = 7k$, $C = 12k$, $D = 5k$

Por dato $\quad A \cdot C - B \cdot D = 9$

$$\underset{3k}{\downarrow}\ \underset{12k}{\downarrow}\ \underset{7k}{\downarrow}\ \underset{5k}{\downarrow}$$

$$36k^2 - 35k^2 = 9 \rightarrow k^2 = 9$$

$$\boxed{k = 3}$$

Luego $A + B + C + D = 27k$

$\therefore A + B + C + D = 27 \times 3 = 81$

Rpta.: 81

2. Sabiendo que

$$\frac{a^2}{27} = \frac{b^2}{75} = \frac{c^2}{12}$$

halle el valor numérico de $R = \frac{(a+b)c}{a^2 + bc}$.

Resolución

De la serie $\frac{a^2}{27} = \frac{b^2}{75} = \frac{c^2}{12}$

Simplificando consecuentes $\frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{25} = \frac{c^2}{4}$

Sacando raíz cuadrada: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2} = k$

Luego

$$R = \frac{(a+b)c}{a^2 + bc} = \frac{(3k+5k)2k}{(3k)^2 + (5k)(2k)}$$

$$R = \frac{16k^2}{9k^2 + 10k^2} = \frac{16\cancel{k^2}}{19\cancel{k^2}}$$

$$\therefore R = \frac{16}{19}$$

Rpta.: $\frac{16}{19}$

3. Si $\frac{m}{n} = \frac{n}{p} = \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{2}{3}$, donde $r - m = 130$, calcule $n + p + q$.

Resolución

De la serie $\frac{m}{n}=\frac{n}{p}=\frac{p}{q}=\frac{q}{r}=\frac{2}{3}$

Por propiedad $\frac{m\cdot \cancel{n}\cdot \cancel{p}\cdot \cancel{q}}{\cancel{n}\cdot \cancel{p}\cdot \cancel{q}\cdot r}=\left(\frac{2}{3}\right)^4 \rightarrow \frac{m}{r}=\frac{16k}{81k}$

Completando la serie

$$\frac{16k}{24k}=\frac{24k}{36k}=\frac{36k}{54k}=\frac{54k}{81k}=\frac{2}{3}$$

Dato: $\underset{\underset{81k}{\downarrow}}{r}\cdot\underset{\underset{16k}{\downarrow}}{m}=130\rightarrow 65k=130\rightarrow \boxed{k=2}$

Piden $\underbrace{n}_{24k}+\underbrace{p}_{36k}+\underbrace{q}_{54k}=114k$

$\therefore\ n+p+q=114\cdot 2=228$

Rpta.: 228

4. Sabiendo que $\frac{M}{3}=\frac{N}{7}=\frac{P}{11}$, y además $P^2-N^2=288$, calcule 5M.

Resolución

De la serie $\frac{M}{3}=\frac{N}{7}=\frac{P}{11}=k$

$\rightarrow\ M=3k,\ N=7k,\ P=11k$

Por dato $\underset{\underset{(11k)^2}{\downarrow}}{P^2}-\underset{\underset{(7k)^2}{\downarrow}}{N^2}=288$

$121k^2-49k^2=288\ \rightarrow\ k^2=4$

$\boxed{k=2}$

Luego $5M=5(3k)=15k$

$=15\cdot 2=30$

Rpta.: 30

5. Si $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}=\frac{1}{3}$, calcule $\left(\frac{m+4p}{4c+a}\right)\left(\frac{m^2+p^2}{a^2+c^2}\right)$.

Resolución

De la serie $\underbrace{\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}=\frac{1}{3}}$

Se cumple $\frac{m}{a}=\frac{p}{c}=\frac{1}{3}$

$\frac{m}{a}=\frac{p\times 4}{c\times 4}=\frac{1}{3}$

Por propiedad $\frac{m+4p}{a+4c}=\frac{1}{3}$

Se eleva al cuadrado

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2=\left(\frac{p}{c}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\rightarrow\frac{m^2}{a^2}=\frac{p^2}{c^2}=\frac{1}{9}$$

Por propiedad $\frac{m^2+p^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{9}$

Luego $\left(\frac{m+4p}{4c+a}\right)\left(\frac{m^2+p^2}{a^2+c^2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$

Rpta.: $\frac{1}{27}$

Helicopráctica

1. Sabiendo que $\frac{A}{2}=\frac{B}{5}=\frac{C}{7}$, y además $A^2 + C^2 = 212$, calcule 3B.

2. Se tiene dos números que están en la relación de 6 a 8; si multiplicamos dichos números resulta 1200. Halle el menor número.

3. En la serie $\frac{a}{7}=\frac{b}{7-n}=\frac{d}{3}=\frac{e}{n+7}$, donde $a+b+e=84$, halle el valor de d.

4. En la serie $\frac{J}{7}=\frac{I}{11}=\frac{M}{3}=\frac{Y}{13}$. Si $(J+I)-(M+Y)=14$, calcule $J+I+M+Y$.

5. Si $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\frac{2}{5}$, calcule $\left(\frac{a^2+b^2}{m^2+n^2}\right)\left(\frac{3c+a}{m+3p}\right)$.

6. Se tiene una serie de tres razones geométricas equivalentes continuas de razón $\frac{1}{4}$. Calcule los menores antecedentes si la suma de los dos primeros consecuentes es 60.

Resolución

7. Si $\frac{a^2+25}{25}=\frac{b^2+49}{49}=\frac{c^2+81}{81}$, además $a+b+c=63$, calcule $a \cdot c$.

8. Dada la serie continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{2}{3}$, calcule $a+d$ sabiendo que $c-b=30$.

Helicotaller

Nivel I

1. Si $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ y $a + c = 72$, calcule $b + c - a$.

Resolución

2. Dada la serie $\frac{m}{5}=\frac{n}{2}=\frac{p}{3}=k$; si $m \cdot n \cdot p = 810$, halle el valor de k.

Resolución

Nivel II

3. Dada la serie $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k$, donde $\frac{a}{e}=\frac{16}{81}$, determine $\frac{1}{k}$.

Resolución

4. Tres números son proporcionales a 4; 6 y 8. Halle la razón geométrica de la suma de dichos números y la diferencia del mayor y el menor.

Resolución

5. En la siguiente serie: $\frac{P}{Q}=\frac{Q}{5}=\frac{625}{P}$, calcule P + Q.

Resolución

Nivel III

6. En una serie de cuatro razones geométricas iguales, los antecedentes son 5; 7; 11 y 12. Si la suma de los dos últimos consecuentes es 92, calcule la diferencia de los otros dos consecuentes.

Resolución

7. Dada la siguiente serie: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{D}{d}$, donde se cumple $\frac{A\cdot B\cdot D}{a\cdot b\cdot d}-\frac{2A(B+D)}{ab+ad}+\frac{A+B+D}{a+b+d}=80$, calcule $a+b+d$ si $A+B+D=140$.

Resolución

8. En una serie continua de constante entera, la suma de los tres antecedentes es 78. Calcule la suma de los consecuentes.

Resolución

Helicodesafío

1. Si en la siguiente serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=k$ se cumple que $\left(\frac{a^2+g^2}{b^2+h^2}\right)+\left(\frac{c-e}{d-f}\right)=12$, calcule

$$\left(\frac{a\cdot e}{f\cdot b}\right)\left(\frac{d+h}{c+g}\right)$$

A) 1 B) 3 C) 9
D) 18 E) 27

2. Si $\frac{32}{c}=\frac{c}{v}=\frac{v}{4}=\frac{4}{m}$, calcule $m+v+c$.

A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

Helicorreto

1. Si $\frac{C}{3} = \frac{A}{5} = \frac{T}{9}$ y $T^2 + A^2 = 954$, calcule 5C.

A) 45 B) 50 C) 40
D) 30 E) 55

2. Si $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8}$, calcule $\frac{5a + b + 5c}{c - a}$.

A) 6 B) 12 C) 10
D) 20 E) 15

3. Si $\frac{m}{n} = \frac{n}{p} = \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = k$ y $\frac{r}{m} = \frac{625}{81}$, calcule $1 - k$.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

4. Si $\frac{m}{8} = \frac{9}{n} = \frac{p}{5}$ y $mp = 360$, calcule $m + n + p$.

A) 36 B) 42 C) 40
D) 45 E) 54

5. Si $\frac{m^2+36}{36} = \frac{n^2+49}{49} = \frac{p^2+16}{16}$, además $m + n + p = 51$, calcule $m + p$.

A) 15 B) 75 C) 60
D) 30 E) 45

Helicotarea

Nivel I

1. Si $\frac{A}{9} = \frac{B}{7} = \frac{C}{2}$, además $B - C = 65$, halle el valor de A.

A) 117 B) 127 C) 130
D) 145 E) 150

2. Dada la serie $\frac{S}{2} = \frac{A}{3} = \frac{C}{5} = \frac{O}{7}$, donde $S \cdot O = 126$, calcule A + C.

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

3. Sea $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$, donde se cumple $\frac{a}{d} = \frac{1}{8}$. Halle el valor de k.

A) 1 B) 1/2 C) 1/4
D) 2 E) 3/2

4. Si se sabe que $\frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{16} = \frac{c^2}{49} = \frac{d^2}{25}$, halle el valor numérico de $E = \frac{a+b+c}{b+c+d}$.

A) $\frac{11}{16}$ B) $\frac{13}{16}$ C) $\frac{15}{16}$
D) $\frac{17}{16}$ E) $\frac{19}{16}$

Nivel II

5. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{4}{7}$, calcule $\left(\frac{c^3 - a^3}{d^3 - b^3}\right)\left(\frac{5f + 4d}{4c + 5e}\right)$.

A) $\frac{49}{16}$ B) $\frac{16}{49}$ C) $\frac{8}{49}$
D) $\frac{8}{343}$ E) $\frac{343}{8}$

6. El número de canicas que tienen tres niños están en la relación de 4; 7 y 11. Si cada uno tuviera 5 canicas más, el número de canicas que tendrían sumaría 81. ¿Cuántas canicas tiene el último?

A) 66 B) 42 C) 67
D) 44 E) 33

7. Dado $\frac{m}{n} = \frac{n}{p} = \frac{p}{q} = \frac{5}{6}$ y $p - n = 30$, calcule $m + q$.

A) 281 B) 441 C) 341
D) 241 E) 185

8. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, además $a + b = 20$ y $c + d = 16$, halle el valor de $a + c$ si $e = 3f$.

A) 1 B) 8 C) 3
D) 9 E) 27

Nivel III

9. Si $\frac{\sqrt{h}+3}{3} = \frac{\sqrt{r}+5}{5} = \frac{\sqrt{t}+7}{7}$ y $h + r + t = 498$, calcule $t - h - r$.

A) 75 B) 30 C) 45
D) 60 E) 90

10. Si $\frac{a}{4} = \frac{b}{8} = \frac{c}{12} = \frac{d}{6}$ y $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2520$, calcule $a \cdot b + c \cdot d$.

A) 99 B) 100 C) 104
D) 120 E) 108